Научная статья
УДК 517.5
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-176-199

ПОПЕРЕЧНИКИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ АНАЛИТИЧЕСКИХ В ЕДИНИЧНОМ КРУГЕ ФУНКЦИЙ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

Мирганд Шабозович Шабозов[1]
Муким Саидусайнович Саидусайнов[2]
Хуромон Мамадамонович Хуромонов[3]

[1]Таджикский национальный университет
[2]Университет центральной Азии
[3]Международный университет туризма и предпринимательства Таджикистана
[1,2,3]Душанбе, Таджикистан,

[1]shabozov@mail.ru
[2]smuqim@gmail.com; https://orcid.org/0000-0001-6843-2828
[3]khuromon@mail.ru

Аннотация

В весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$, $(1 \le q \le \infty)$ для определённых классов аналитических в единичном круге функций получены точные значения некоторых известных в теории приближения n-поперечников.

Ключевые слова и фразы

наилучшее приближение, модуль непрерывности, n-поперечники, мажоранта.

Для цитирования

Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С., Хуромонов Х. М. Поперечники некоторых классов аналитических в единичном круге функций в весовом пространстве Бергмана // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 2, С. 176-199. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-176-199

Widths of certain classes of analytic functions in the unit disk in a weighted Bergman space

Mirgand Sh. Shabozov[1], Mukim S. Saidusainov[2], Khuromon M. Khuromonov[3]

[1]Tajik National University,
[2]University of Central Asia,
[3]International University of Tourism and Entrepreneurship of Tajikistan,
[1,2,3]Dushanbe, Tajikistan

[1]shabozov@mail.ru
[2]smuqim@gmail.com; https://orcid.org/0000-0001-6843-2828
[3]khuromon@mail.ru

Abstract

In the weighted Bergman space $B_{q,\gamma}$, $(1 \le q \le \infty)$, exact values of certain well-known n-widths from approximation theory are obtained for specific classes of functions analytic in the unit disk.

Keywords

best approximation, modulus of continuity, n-widths, majorant.

For citation

Shabozov M. Sh, Saidusainov M. S., Khuromonov Kh. M. Widths of certain classes of analytic functions in the unit disk in a weighted Bergman space // *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 2, P. 176-199. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-2-176-199

§1. Введение и предварительные результаты

К настоящему времени для экстремальной задачи вычисления точных значений n-поперечников различных классов аналитических в единичном круге функций, принадлежащих пространству Харди H_q $(1 \le q \le \infty)$ и обычному пространству Бергмана B_q $(1 \le q \le \infty)$, получен ряд окончательных результатов (см., например, работы [1]–[16] и литературу приведенную в них). Но для весового пространства Бергмана $B_{q,\gamma}$ $(1 \le q \le \infty, \gamma := \gamma(|z|) > 0)$ указанный вопрос менее изучен. Тем не менее некоторые результаты в этом направлении получены в недавно опубликованных работах [17]–[19]. Данная статья посвящена получению точных значений некоторых видов n-поперечников для определенных классов аналитических в единичном круге функций, с ограниченной по норме пространства Харди r-й производной $\|f^{(r)}\|_{H_q}$ $(1 \le q \le \infty)$ в весовых пространствах Бергмана и классов аналитических в единичном круге функций $B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi)$, усреднённое значение модуля непрерывности $\omega(f^{(r)}, t)_{H_{2,\rho}}$ с весом $\sin \dfrac{\pi}{u} t$ $(0 \le u \le \pi)$ которых в пространстве $H_{2,\rho}$ $(0 < \rho < 1)$ ограничено сверху заданной монотонно возрастающей мажорантой Φ в пространстве $B_{2,\gamma}$ являющиеся обобщением классов $B_{2,\rho,\lambda}^{(r)}(\Phi)$, рассмотренной ранее С.Б.Вакарчуком [9]. Последный класс содержится в $B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi)$ в случае $\gamma(\rho) = (1-\rho)^{\lambda}(1/p - 1/2) - 1$, $0 < p < 2$, $1 \le \lambda \le \infty$.

Напомним необходимые в дальнейшем понятия. Пусть $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathcal{A}(U)$ — множество аналитических в U функций. Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U)$ при $\rho \in (0,1)$ положим

$$M_q(f,\rho) := \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } 1 \le q < \infty \\ \max\big\{|f(\rho e^{it})| : 0 \le t < 2\pi\big\}, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

Символом H_q, $1 \le q \le \infty$, обозначим банахово пространство Харди, состоящее из функций $f \in \mathcal{A}(U)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{H_q} := \lim_{\rho \to 1-0} M_q(f,\rho). \tag{1}$$

Хорошо известно [20, с.279-280], что в (1) норма реализуется на угловых граничных значениях функций $f(e^{i(\cdot)}) \in L_q[0,2\pi]$, $1 \le q \le \infty$:

$$\|f\|_{H_q} = \|f(e^{i(\cdot)})\|_{L_q[0,2\pi]} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^q dt\right)^{1/q}, & \text{если } 1 \le q < \infty \\ \operatorname{ess\,sup}\big\{|f(e^{it})| : 0 \le t < 2\pi\big\}, & \text{если } q = \infty. \end{cases}$$

Обозначим через $H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty,\ 0 < \rho \le 1)$ пространство Харди аналитических в круге $U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| < \rho\}$ функций $f(z)$, для которых

$$\|f\|_{H_{q,\rho}} := \|f(\rho\cdot)\|_{H_q} < \infty.$$

Ясно, что

$$M_q(f,\rho) = \|f(\rho e^{i(\cdot)})\|_{L_q[0,2\pi]}.$$

Через $\mathscr{L}_q := \mathscr{L}_q(U)$, $1 \le q \le \infty$ обозначим банахово пространство комплекснозначных в U функций f, имеющих конечную норму

$$\|f\|_{\mathscr{L}_q} = \left(\frac{1}{2\pi}\iint_U |f(z)|^q dxdy\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} \rho|f(\rho e^{it})|^q dt d\rho\right)^{1/q},$$

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 176-199
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 176-199

где интеграл понимается в смысле Лебега.

Пусть $\gamma(|z|)$ — некоторая неотрицательная измеримая не эквивалентная нулевой функция, суммируемая на множестве U. Через $\mathscr{L}_{q,\gamma} := \mathscr{L}_q(U,\gamma)$, $1 \le q \le \infty$, обозначим множество комплекснозначных в U функций f, для которых

$$\gamma^{1/q} f \in \mathscr{L}_q(U), \quad \|f\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} = \|\gamma^{1/q} f\|_{\mathscr{L}_q}.$$

Под $B_{q,\gamma} := B_q(U,\gamma)$, $1 \le q \le \infty$, понимаем банахово пространство $f \in \mathcal{A}(U)$ таких, что $f \in \mathscr{L}_{q,\gamma}$. При этом

$$\|f\|_{B_{q,\gamma}} := \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) M_q^q(f,\rho) d\rho\right)^{1/q} = \left(\int_0^1 \rho\gamma(\rho) \|f(\rho e^{i(\cdot)})\|_{L_q[0,2\pi]}^q d\rho\right)^{1/q}. \tag{2}$$

В частном случае, когда $\gamma = 1$ пространство $B_q := B_{q,1}$ является обычным пространством Бергмана.

Пусть X — банахово пространство, S — единичный шар в нем, K — некоторое выпуклое центрально-симметричное подмножество в X, $L_n \subset X$ — n-мерное линейное подпространство, $L^n \subset X$ — подпространство коразмерности n, $\Lambda : X \to L_n$ — линейный непрерывный оператор, отображающий X в L_n.

Приближение фиксированного множества $K \subset X$ фиксированным подпространством L_n этого же пространства X определяется величиной

$$E(K, L_n)_X := \sup\{\inf\{\|f - \varphi\|_X : \varphi \in L_n\} : f \in K\}.$$

Величина

$$\mathscr{E}(K, L_n)_X := \inf\{\sup\{\|f - \Lambda(f)\|_X : f \in K\} : \Lambda X \subset L_n\} \tag{3}$$

характеризует наилучшее линейное приближение множества K элементами подпространства $L_n \subset X$. Величины

$$d_n(K,X) := \inf\{E(K,L_n)_X : L_n \subset X\}, \tag{4}$$
$$d^n(K,X) := \inf\{\sup\{\|f\|_X : f \in K \cap L^n\} : L^n \subset X\}, \tag{5}$$
$$b_n(K,X) := \sup\{\sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap L_{n+1} \subset K\} : L_{n+1} \subset X\}, \tag{6}$$
$$\delta_n(K,X) := \inf\{\mathscr{E}(K,L)_X : L_n \subset X\} \tag{7}$$

называют соответственно *колмогоровским, гельфандовским, бернштейновским и линейным n-поперечниками* (см., например, [7, гл. II, § 1–4], [21, гл. 4, § 4.1]).

Если существует подпространство $L_n^* \subset X$, $\dim L_n^* \le n$, на котором нижняя грань в (4) достигается, то есть $d_n(K,X) = E(K,L_n^*)_X$, то L_n^* называют *экстремальным подпространством* для $d_n(K,X)$. Экстремальное подпространство L_n^* является наилучшим аппаратом приближения множества K в классе всех подпространств $\{L_n\} \subset X$.

Подпространство $\widetilde{L}_n \subset X$, $\dim \widetilde{L}_n \le n$, если оно существует, для которого

$$\delta_n(K,X) = \mathscr{E}(K,\widetilde{L}_n)_X,$$

называют *экстремальным* для $\delta_n(K,X)$. Особый интерес представляет отыскание экстремальных подпространств $\widehat{L}_n \subset X$, $\dim \widehat{L}_n \le n$, таких, что

$$E(K,\widehat{L}_n)_X = \mathscr{E}(K,\widehat{L}_n)_X = d_n(K,X) = \delta_n(K,X).$$

Если существует подпространство $\overline{L}_{n+1} \subset X$, $\dim \overline{L}_{n+1} \le n+1$, для которого

$$b_n(K,X) = \sup\{\varepsilon > 0 : \varepsilon S \cap \overline{L}_{n+1} \subset K\},$$

то оно является экстремальным для $b_n(K,X)$.

Подпространство $L_*^n \subset X$ коразмерности n, если оно существует, такое, что

$$d^n(K,X) = \sup\{\|f\|_X : f \in K \cap L_*^n\},$$

называют *экстремальным* для $d^n(K,X)$.

Напомним, что между перечисленными выше n-поперечниками (4)–(7) имеют место следующие соотношения

$$b_n(K,X) \le \begin{matrix} d_n(K,X) \\ d^n(K,X) \end{matrix} \le \delta_n(K,X). \tag{8}$$

§2. Основная теорема о значении n-поперечников в $B_{q,\gamma}$

Пусть $\mathcal{P}_n$ — подпространство комплексных алгебраических полиномов степени не более n. Равенством

$$E_{n-1}(f)_X := E(f,\mathcal{P}_{n-1})_X := \inf\{\|f - p_{n-1}\|_X : p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}\} \tag{9}$$

определим величину наилучшего приближения функции $f \in X$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$, а

$$E_{n-1}(\mathfrak{M})_X := E(\mathfrak{M},\mathcal{P}_{n-1})_X := \sup\{E_{n-1}(f)_X : f \in \mathfrak{M}\} \tag{10}$$

— наилучшее приближение множества $\mathfrak{M} \subset X$ подпространством $\mathcal{P}_{n-1}$, где $X = B_{q,\gamma}$ или $X = H_q$ $(1 \le q \le \infty)$.

Для произвольной функции $f \in \mathcal{A}(U)$, имеющей разложение в ряд Тейлора

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) z^k, \ z \in U, \tag{11}$$

производную r-го порядка $f^{(r)}$ ($f^{(0)} \equiv f$) определим равенством

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r}, \ r \in \mathbb{N},$$

где

$$\alpha_{k,r} := k(k-1)\cdots(k-r+1), \ k \geq r, \, k \in \mathbb{N}, \, r \in \mathbb{Z}_+, \, \alpha_{k,0} = 1.$$

Всюду далее через $H_q^{(r)}$ ($r \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq q \leq \infty$) обозначим множество функций $f \in H_q$ ($1 \leq q \leq \infty$), у которых $\|f^{(r)}\|_{H_q} < \infty$ ($1 \leq q \leq \infty$).

Обозначим через $W^{(r)}X$ — класс функций $f \in \mathcal{A}(U)$, которые удовлетворяют условию $\|z^r f^{(r)}(z)\|_X \leq 1$. Отметим, что в случае пространства Харди $X = H_q$ ($1 \leq q \leq \infty$) поперечники по Колмогорову класса $W^{(r)}H_q$ при всех $q \in [1, +\infty]$ вычислены в работе Л.В.Тайкова [3], а в случае обычного пространства Бергмана B_q ($1 \leq q \leq \infty$) значения всех перечисленных выше n-поперечников найдены в работе С.Б.Вакарчука [9].

Здесь мы продолжим исследование в этом направлении и вычислим точные значениея всех n-поперечников класса функций $W^{(r)}H_q$ в весовом пространстве Бергмана $B_{q,\gamma}$ ($1 \leq q < \infty$).

Для дальнейшего нам понадобится следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$. Тогда для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$ ($1 \leq q < \infty$) выполняется неулучшаемое неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1} \gamma(\rho) d\rho \right)^{1/q} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}, \tag{12}$$

в том смысле, что существует функция $f_0 \in H_q^{(r)}$ ($1 \leq q < \infty$), обращающая (12) в равенство.

Доказательство. Сначала докажем, что для произвольной функции $f \in H_q^{(r)}$ существует полином $p_{n-1}(z)$, зависящий от функции $f(z)$, для которой выполняется неравенство

$$\|f - p_{n-1}\|_{H_{q,\rho}} \leq \rho^n \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}. \tag{13}$$

Для этого воспользуемся схемой рассуждений работы [16] (случай $s=0$). Пусть $P_{n-r-1}(f^{(r)},z)$ — полином наилучшего приближения производной $f^{(r)}(z)$ в норме пространства H_q:

$$E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}=\|f^{(r)}-P_{n-r-1}(f^{(r)})\|_{H_q}.$$

Положим

$$R(z):=R(f^{(r)},z)=f^{(r)}(z)-P_{n-r-1}(f^{(r)},z).$$

Выражая коэффициенты Тейлора $c_k(f)$ функции $f(z)$ по формуле

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi i\alpha_{k,r}}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta,\ k\ge n,\ k,n\in\mathbb{N},$$

и полагая для $z\in U$, $|z|=\rho<1$,

$$d_k(f):=d_{k,n}(f)=-\frac{|z|^{2(n-k)}}{2\pi i\alpha_{2n-k,r}}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta,\ 0\le k\le n-1,$$

с учётом формулы (11) для функции f получаем

$$f(z)-\sum_{k=0}^{n-1}c_k(f)z^k-\sum_{k=0}^{n-1}d_k(f)z^k=\sum_{k=n}^{\infty}c_k(f)z^k-\sum_{k=0}^{n-1}d_k(f)z^k$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{k,r}}\left(\frac{z^k}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta\right)+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{|z|^{2(n-k)}}{\alpha_{2n-k,r}}\left(\frac{z^k}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\frac{\zeta^r R(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta\right)$$

$$=\frac{z^r}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r}R(\zeta)\left\{\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{k,r}}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha_{2n-k,r}}\left|\frac{z}{\zeta}\right|^{2(n-k)}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{k-n}\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=\frac{z^r}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r}R(\zeta)\left\{\frac{1}{\alpha_{n,r}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{n+k,r}}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha_{n+k,r}}\left(\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}\right)^k\right.$$

$$\left.+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{n+k,r}}\left(\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}\right)^k\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=\frac{z^r}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1}\left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r}R(\zeta)\left\{\frac{1}{\alpha_{n,r}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_{n+k,r}}\left[\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k+\left(\frac{\overline{z}}{\overline{\zeta}}\right)^k\right]\right\}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{z^r}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} R(\zeta) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}.$$

Таким образом, для некоторого полинома $p_{n-1}(z)$, зависящего от функции $f(z)$, справедлива формула

$$f(z) - p_{n-1}(z) = \frac{z^r}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{n-r} R(\zeta) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + 2\mathrm{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n+k,r}} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \right\} \frac{d\zeta}{\zeta}. \tag{14}$$

Полагая в (14) $z = \rho e^{it}$, $\zeta = e^{i\theta}$ и выполнив замену переменных $\theta - t = \tau$, запишем формулу (14) в следующем виде:

$$f(\rho e^{it}) - p_{n-1}(\rho e^{it}) = \frac{\rho^n e^{irt}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n-r)\tau} R(e^{i(t+\tau)}) \left\{ \frac{1}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{\alpha_{n+k,r}} \cos k\tau \right\} d\tau. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что числовая последовательность $\left\{ \dfrac{\rho^k}{\alpha_{n+k,r}} \right\}_{k=0}^{\infty}$ является выпуклой вниз и её общий член стремится к нулю при $k \to \infty$. Но тогда в силу леммы 2.3 [7, с.251] функция

$$\Phi_{n,r}(t) := \frac{1}{\alpha_{n,r}} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\rho^k}{\alpha_{n+k,r}} \cos kt$$

является неотрицательной и интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$ функцией.

Пусть $1 \le q < \infty$. Из равенства (15) получаем

$$\|f - p_{n-1}\|_{H_{q,\rho}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) - p_{n-1}(\rho e^{it}) \right|^q dt \right\}^{1/q}$$
$$= \left\{ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{\rho^n e^{irt}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{-i(n-r)\tau} R(e^{i(t+\tau)}) \Phi_{n,r}(\tau) d\tau \right|^q dt \right\}^{1/q}. \tag{16}$$

В силу обобщённого неравенства Минковского из равенства (16) имеем

$$\|f - p_{n-1}\|_{H_{q,\rho}} \le \frac{\rho^n}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |e^{-i(n-r)\tau} \Phi_{n,r}(\tau)| d\tau \cdot \|R\|_{H_q} = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \|R\|_{H_q},$$

и так как $\|R\|_{H_q} = E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}$, окончательно получаем

$$\|f - p_{n-1}\|_{H_{q,\rho}} \le \rho^n \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}.$$

Таким образом, неравенство (13) доказано для $1 \le q < \infty$.

Случай $q = \infty$ получается предельным переходом из (13). Имеем

$$\begin{aligned}\|f - p_{n-1}\|_{H_{\infty,\rho}} &= \lim_{q\to\infty} \|f - p_{n-1}\|_{q,\rho} \\ &= \rho^n \operatorname*{ess\,sup}_{0\le t<2\pi} |R(e^{it})| \cdot \int_0^{2\pi} |e^{-i(n-r)\tau}\Phi_{n,r}(\tau)| d\tau \\ &= \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \|R\|_\infty = \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}} \cdot E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_\infty}.\end{aligned}$$

Этим неравенство (13) полностью доказано.

В силу определения $M_q(f,\rho)$ неравенство (13) запишем в виде

$$M_q(f - p_{n-1}, \rho) \le \rho^n \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}. \tag{17}$$

Возведём обе части неравенства (17) в степень q $(1 \le q < \infty)$, умножим на $\rho\gamma(\rho)$ и интегрируем по $\rho \in (0,1)$, затем полученное неравенство возведём в степень $1/q$. Тогда, используя определение нормы в пространстве $B_{q,\gamma}$, имеем

$$\|f - p_{n-1}\|_{B_{q,\gamma}} \le \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q} \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}.$$

В последнем неравенстве, переходя к нижней грани по всем комплексным полиномам $p_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$, получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_{q,\gamma}} \le \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho) d\rho\right)^{1/q} E_{n-r-1}(f^{(r)})_{H_q}$$

и неравенство (12) доказано. Непосредственным вычислением можно убедиться, что неравенство (12) для функции $f_0(z) = z^n$ обращается в равенство, чем и завершаем доказательство теоремы 1.

Положим

$$\mathcal{L}_n(f,z) = \sum_{k=0}^{r-1} c_k(f) z^k + \sum_{k=r}^{n-1} c_k(f) z^k \left(1 - \frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}} |z|^{2(n-k)}\right), \tag{18}$$

$$G_{n,r,\rho}(t) = \rho^n e^{int} \Phi_{n,r}(t). \tag{19}$$

Тогда непосредственным вычислением легко убедиться, что для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q$ имеет место равенство [7, с.254, случай $R=1$]:

$$f(\rho e^{it}) - \mathcal{L}_n(f,\rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(e^{i\theta})G_{n,r,\rho}(t-\theta)d\theta,\ 0<\rho\le 1. \tag{20}$$

Теорема 2. *Пусть $1\le q\le\infty$, $n\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{Z}_+$, $n>r$. Тогда выполняются равенства*

$$\begin{aligned} d_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_{q,\gamma}) &= \delta_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_{q,\gamma}) = d^n(W^{(r)}H_q;B_{q,\gamma})\\ &= d^n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_{q,\gamma}) = b_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_{q,\gamma})\\ &= b_n(W^{(r)}H_q;B_{q,\gamma}) = E(W^{(r)}H_q;L_n^*)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}\\ &= \mathcal{E}(W^{(r)}H_q;L_n^*)_{Bq,\gamma} = \sup\{\|f-\mathcal{L}_n(f)\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}} : f\in W^{(r)}H_q\}\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \infty, & \text{если } n<r;\\ \dfrac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\displaystyle\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}, & \text{если } n\ge r,\ 1\le q<\infty;\\ \dfrac{1}{\alpha_{n,r}}, & \text{если } n\ge r,\ q=\infty. \end{cases} \tag{21}$$

При этом:

1) $L_n^* := \operatorname{span}\left\{\left\{z^k\right\}_{k=0}^{r-1},\ \left\{\left(1-\dfrac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{2n-k,r}}|z|^{2(n-k)}\right)z^k\right\}_{k=r}^{n-1}\right\}$ *является оптимальным подпространством для колмогоровского n-поперечника $d_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_{q,\gamma})$;*

2) Линейный оператор $\mathcal{L}_n(f,z)$, определённый равенством (18), является оптимальным линейным методом приближения для линейного n-поперечника $\delta_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_{q,\gamma})$;

3) Подпространство $L^n := \{f : f\in B_{q,\gamma},\ f^{(j)}(0)=0,\ j=\overline{0,n-1}\}$ является оптимальным для гельфандовского n-поперечника $d^n(W^{(r)}H_q;B_{q,\gamma})$;

4) $\mathcal{P}_n := \operatorname{span}\{1,z,\ldots,z^n\}$ является оптимальным для бернштейновского n-поперечника $b_n(W^{(r)}H_q;B_{q,\gamma})$.

Доказательство. Для случая $n<r$ результат (21) очевиден, а потому предположим, что $n\ge r$ и $1\le q<\infty$.

Докажем, что для произвольной функции $f\in W^{(r)}H_q$ имеет место неравенство

$$M_q(f-\mathcal{L}_n(f),\rho) = \left\|f(\rho e^{i(\cdot)}) - \mathcal{L}_n(f,\rho e^{i(\cdot)})\right\|_{L_q[0,2\pi]} \le \frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\ \ (0<\rho\le 1). \tag{22}$$

В самом деле, оценивая по абсолютной величине равенство (20) и применяя к интегралу в правой части неравенство для свёрток [7, с.253], с учётом равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|G_{n,r,\rho}(t)|dt=\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}},$$

для произвольной функции $f\in W^{(r)}H_q$ получаем

$$\begin{aligned}M_q(f-\mathcal{L}_n(f),\rho)&=\|f(\rho e^{i(\cdot)})-\mathcal{L}_n(f,\rho e^{i(\cdot)})\|_{L_q[0,2\pi]}\\&\le\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f^{(r)}(e^{i\theta})|^q d\theta\right)^{1/q}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|G_{n,r,\rho}(t)|dt\right)\\&=\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}}\|f^{(r)}\|_{H_q}\le\frac{\rho^n}{\alpha_{n,r}},\end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (22).

Возведя обе части (22) в степень q $(1\le q<\infty)$, умножив на функцию $\rho\gamma(\rho)$ и интегрируя вновь полученное неравенство по $\rho\in[0,1]$, после возведения в степень $1/q$ $(1\le q<\infty)$, получаем

$$\begin{aligned}&\|f-\mathcal{L}_n(f)\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}\\&=\left(\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)M_q^q(f-\mathcal{L}_n(f),\rho)d\rho\right)^{1/q}\le\frac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}.\end{aligned}\tag{23}$$

Но тогда из соотношения между n-поперечниками (8) и неравенством (23) имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(W^{(r)}H_q,\mathscr{L}_{q,\gamma})&\le\delta_n(W^{(r)}H_q,\mathscr{L}_{q,\gamma})\le\mathcal{E}(W^{(r)}H_q,L_n^*)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}\\&\le\sup\{\|f-\mathcal{L}_n(f)\|_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}:f\in W^{(r)}H_q\}\\&\le\frac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\int\limits_0^1\rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q},\end{aligned}\tag{24}$$

где под $\mathrm{diam}(\cdot)$ подразумевается любой из n-поперечников $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$ или $d^n(\cdot)$. При этом

$$d_n(W^{(r)}H_q,\mathscr{L}_{q,\gamma})\le E(W^{(r)}H_q,L_n^*)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}\le\mathcal{E}(W^{(r)}H_q,L_n^*)_{\mathscr{L}_{q,\gamma}}.\tag{25}$$

Известно (см., [7, гл. II, §3, предложение 3.2]), что если X и Y — линейные нормированные пространства и X является подпространством Y, то для любого множества $A \subset X$, $d^n(A,X) = d^n(A,Y)$. Поскольку $B_{q,\gamma} \subset \mathscr{L}_{q,\gamma}$ и $W^{(r)}H_q \subset B_{q,\gamma}$, то

$$d^n(W^{(r)}H_q, B_{q,\gamma}) = d^n(W^{(r)}H_q, \mathscr{L}_{q,\gamma}), \tag{26}$$

и из определения бернштейновского n-поперечника следует, что

$$b_n(W^{(r)}H_q, \mathscr{L}_{q,\gamma}) \geq b_n(W^{(r)}H_q, B_{q,\gamma}). \tag{27}$$

Получим оценку снизу бернштейновского n-поперечника, записанного в правой части неравенства (27). С этой целью воспользуемся подпространством $\mathcal{P}_n$ алгебраических комплексных полиномов степени $\leq n$. Для произвольного $p_n \in \mathcal{P}_n$ в работе [15, с.16, формула (46), случай $R = 1$] доказано неравенство

$$\|p_n^{(r)}\|_{H_q} \leq \alpha_{n,r} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}}. \tag{28}$$

Учитывая неравенства (24) и (25), введем в множестве $\mathcal{P}_n \cap B_{q,\gamma}$ $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1} := \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/q} \right\},$$

и покажем, что $S_{n+1} \subset W^{(r)}H_q$. Но для произвольного $p_n \in S_{n+1}$ из (28) имеем

$$\begin{aligned} \|p_n^{(r)}\|_{H_q} &\leq \alpha_{n,r} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{-1/q} \|p_n\|_{B_{q,\gamma}} \\ &\leq \alpha_{n,r} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{-1/q} \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/q} = 1 \end{aligned}$$

и тем самым включение $S_{n+1} \subset W^{(r)}H_q$ доказано. Но тогда из определения бернштейновского n-поперечника получаем

$$b_n(W^{(r)}H_q, B_{q,\gamma}) \geq b_n(S_{n+1}, B_{q,\gamma}) \geq \frac{1}{\alpha_{n,r}} \left(\int_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho \right)^{1/q}. \tag{29}$$

Сопоставляя соотношения (24), (25), (29) в силу (8) получаем требуемые равенства (21). Этим равенство (21) доказано для $1 \le q < \infty$. Случай $q = \infty$ получается предельным переходом при $q \to \infty$ (см., напр., [16]).

Из приведенного выше доказательства следует, что подпространство L_n^* является экстремальным для класса $W^{(r)}H_q$ в пространстве $\mathscr{L}_{q,\gamma}$, в случае вычисления колмогоровского и линейного n-поперечников, а подпространство $\mathcal{P}_n$ — экстремальное для бернштейновского n-поперечника $b_n(W^{(r)}H_q, B_{q,\gamma})$. Линейный непрерывный оператор $\mathcal{L}_n(f,z)$, определённый равенством (18) и удовлетворяющий неравенству (23), будет наилучшим линейным методом приближения класса $W^{(r)}H_q$ в пространстве $\mathscr{L}_{q,\gamma}$.

Далее заметим, что для произвольной функции $f \in W^{(r)}H_q \cap L_*^n$ в силу (18), (20) и равенств

$$c_k(f) = f^{(k)}(0)/k! = 0,\ k = \overline{0, n-1}$$

справедливо представление

$$f(\rho e^{it}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(e^{i\theta})e^{irt}G_{n,r,\rho}(t-\theta)d\theta,$$

где $0 \le \rho < 1$, $0 \le t < 2\pi$. Из (18), (20) и (24) и из определения гельфандовского n-поперечника получаем

$$\begin{aligned} d^n(W^{(r)}H_q, B_{q,\gamma}) &\le \sup\left\{\|f\|_{B_{q,\gamma}} : f \in W^{(r)}H_q \cap L_*^n\right\} \\ &\le \frac{1}{\alpha_{n,r}}\left(\int\limits_0^1 \rho^{nq+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/q}. \end{aligned} \tag{30}$$

Сопоставляя неравенства (29) и (30) и учитывая соотношения (8), убеждаемся, что подпространство L_*^n коразмерности n будет экстремальным для гельфандовского n-поперечника $d^n(W^{(r)}H_q, B_{q,\gamma})$, чем и завершаем доказательство теоремы 2.

Следствие 1. *В условиях теоремы 2 в случае $\gamma(\rho) \equiv 1$ имеют место равенства*

$$\begin{aligned} d_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_q) &= \delta_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_q) = d^n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_q) = d^n(W^{(r)}H_q;B_q) \\ &= b_n(W^{(r)}H_q;\mathscr{L}_q) = b_n(W^{(r)}H_q;B_q) \\ &= E(W^{(r)}H_q;L_n^*)_{\mathscr{L}_q} = \mathcal{E}(W^{(r)}H_q;L_n^*)_{Bq} \\ &= \begin{cases} \infty, & \text{если}\ \ n < r; \\ \dfrac{(nq+2)^{-1/q}}{\alpha_{n,r}}, & \text{если}\ \ n \ge r,\ 1 \le q < \infty; \\ \dfrac{1}{\alpha_{n,r}}, & \text{если}\ \ n \ge r,\ q = \infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Отметим, что утверждение следствия 1 ранее было получено А.Пинкусом [7, с.254, теорема 2.4].

§3. Некоторые результаты в пространстве $B_{2,\gamma}$, связанные с модулем непрерывности в пространстве $H_{2,\rho}$

В этом пункте находим точные значения бернштейновского и колмогоровского n-поперечников классов аналитических в единичном круге функций, усреднённое значение модуля непрерывности $\omega(z^r f^{(r)}; t, \rho)_{H_2}$ с весом $\sin(\pi/u)t$ которых ограничено сверху заданной мажорантой Φ.

Предварительно докажем одну лемму, устанавливающую связь между величинами наилучшего приближения $E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}$ и $E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}}$.

Лемма 1. *Для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$, у которой $f^{(r)} \in B_{2,\gamma}$, имеет место неравенство*

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} \leq \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{B_{2,\gamma}} \tag{31}$$

причём неравенство (31) *обращается в равенство для функции* $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > r$, $r \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. В самом деле для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}^{(r)}$ непосредственными вычислениями получаем

$$E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho, \tag{32}$$

$$E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_{2,\gamma} = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho. \tag{33}$$

Учитывая (33) и заметив, что при $k \geq n$ и любой $r \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства $\alpha_{k,r} \geq \alpha_{n,r}$ ($\alpha_{k,r}/\alpha_{n,r} \geq 1$), из неравенства (32) получаем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_{2,\gamma} &= \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{\alpha_{k,r}}{\alpha_{n,r}}\right)^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_{2,\gamma}, \end{aligned}$$

откуда и вытекает неравенство (31).

Покажем точность (31) на функции $f_0(z) = az^n$, $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$. Для этой функции $f_0^{(r)}(z) = a\alpha_{n,r}z^{n-r}$, $z^r f_0^{(r)} = a\alpha_{n,r}z^n$

$$E_{n-1}^2(f_0)_{2,\gamma} = |a|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho, \tag{34}$$

$$E_{n-1}^2(z^r f_0^{(r)})_{2,\gamma} = |a|^2\alpha_{n,r}^2 \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho. \tag{35}$$

Воспользовавшись равенствами (35) и (34), запишем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f_0)_{2,\gamma} &= |a|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho \\ &= \frac{1}{\alpha_{n,r}^2}\left(|a|^2\alpha_{n,r}^2 \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right) = \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} E_{n-1}^2(z^r f_0^{(r)})_{2,\gamma} \end{aligned}$$

и точность неравенства (31) доказана.

Из доказанной леммы 1 вытекает

Следствие 2. *В условиях леммы 1 выполняется неравенства*

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} \le \left(\int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho\right)^{1/2} \frac{1}{\alpha_{n,r}} E_{n-1}(z^r f^{(r)})_{H_2}. \tag{36}$$

В самом деле, неравенство (36) вытекает из следующего соображения. Имеем

$$\begin{aligned} E_{n-1}^2(f)_{B_{2,\gamma}} &= \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \\ &\le \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \int\limits_0^1 \rho^{2k+1}\gamma(\rho)d\rho \\ &\le \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_{k,r}^2 |c_k(f)|^2 \\ &= \int\limits_0^1 \rho^{2n+1}\gamma(\rho)d\rho \cdot \frac{1}{\alpha_{n,r}^2} E_{n-1}^2(z^r f^{(r)})_{H_2}, \end{aligned}$$

откуда и следует неравенство (36).

Пусть $f \in \mathcal{A}(U)$ принадлежит пространству $B_{q,\gamma}$. Полагая

$$M_q(f(\cdot+h)-f(\cdot),\rho)=\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|f(\rho e^{i(t+h)})-f(\rho e^{it})|^q dt\right)^{1/q},$$

определим модуль непрерывности функции $f \in H_{q,\rho}$ $(1 \le q \le \infty)$ равенством

$$\omega(f;\delta,\rho)_q := \sup_{|h|\le\delta} M_q(f(\cdot+h)-f(\cdot),\rho). \tag{37}$$

Легко проверить, что при каждом фиксированном $\rho \in (0,1)$ функция $\omega(f;\delta,\rho)_q$ обладает всеми свойствами модуля непрерывности.

Пусть $\Phi(u)$ — возрастающая положительная функция, для которой $\lim\limits_{u\to 0}\Phi(u)=\Phi(0)=0$. Для $0<u\le 2\pi$ введём следующий класс аналитических функций:

$$B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi) := \left\{ f \in B_{2,\gamma} : \int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)\left(\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u \omega^2(z^r f^{(r)};t,\rho)_2 \sin\frac{\pi}{u}t dt\right)^{1/2} d\rho \le \Phi(u)\right\}.$$

Следуя работе [8], введём обозначение

$$(1-\cos mt)_* := \{1-\cos mt,\ \text{если } 0<mt\le\pi;\quad 2, \text{если } mt>\pi\}.$$

Следующая теорема обобщает результаты исследования работ [9, 22] на более широких классах аналитических в единичном круге функций.

Теорема 3. *Если функция $\Phi(u)$ при всех $u \in (0,2\pi]$ и любом $\mu>0$ удовлетворяет условию*

$$\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\pi\mu}(1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}dt \le 2\mu\Phi^2(u), \tag{38}$$

то

$$b_n(B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi),B_{2,\gamma}) = d_n(B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi),B_{2,\gamma}) = \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{39}$$

Доказательство. Воспользовавшись определением пространства $B_{2,\gamma}$ для произвольной функции $f \in B_{2,\gamma}$ простыми вычислениями получаем:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}} &= \inf\{\|f-p_{n-1}\|_{B_{2,\gamma}} : p_{n-1}\in\mathcal{P}_{n-1}\} = \|f-T_{n-1}(f)\|_{B_{2,\gamma}} \\ &= \left\{\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)M_2^2(f-T_{n-1}(f),\rho)d\rho\right\}^{1/2}, \end{aligned} \tag{40}$$

где $T_{n-1}(f,z)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}c_kz^k$ — частичная сумма $(n-1)$-го порядка разложения функции $f\in B_{2,\gamma}$ в ряд Тейлора $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$.

В [9] доказано, что для произвольного $\rho\in(0,1)$ имеет место неравенство

$$M_2^2(f-T_n(f),\rho)\le\frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2^2(f;t,\rho)_2\sin ntdt. \tag{41}$$

Учитывая неравенство (41), из (40) получаем

$$E_{n-1}(f)_{B_{2,\gamma}}\le\left\{\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)\left(\frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n}\omega_2^2(f;t,\rho)_2\sin ntdt\right)d\rho\right\}^{1/2}. \tag{42}$$

Легко проверить, что неравенство (42) является точным для функции $f_0(z)=az^n$, $a\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$. Из неравенства (42) сразу вытекает следующее соотношение

$$E_{n-1}(z^rf^{(r)})_{2,\gamma}\le\left\{\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)\left(\frac{n}{4}\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(z^rf^{(r)};t,\rho)_2\sin ntdt\right)d\rho\right\}^{1/2}. \tag{43}$$

Учитывая последнее соотношение, из неравенства (31) имеем

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\le\frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha_{n,r}}\left\{\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)\left(\frac{n}{2}\int\limits_0^{\pi/n}\omega^2(z^rf^{(r)};t,\rho)_2\sin ntdt\right)d\rho\right\}^{1/2}. \tag{44}$$

Из (44) и определения класса $B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi)$ получаем оценку сверху

$$d_n(B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi),B_{2,\gamma})\le\frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \tag{45}$$

Рассмотрим $(n+1)$-мерный шар полиномов

$$S_{n+1}:=\left\{p_n\in\mathcal{P}_n:\|p_n\|_{B_{2,\gamma}}\le\frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}. \tag{46}$$

Поскольку для произвольного полинома $p_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k\in\mathcal{P}_n$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|(\rho e^{i(t+\tau)})^r p_n^{(r)}(\rho e^{i(t+\tau)})-(\rho e^{i\tau})^r p_n^{(r)}(\rho e^{i\tau})\right|d\tau$$

$$=2\sum_{k=r}^{n}\alpha_{k,r}^2(1-\cos kt)\rho^{2k}|a_k|^2, \qquad (47)$$

то, учитывая, что $M_2^2(p_n,\rho)=\sum\limits_{k=0}^{n}\rho^{2k}|a_k|^2$, из определения (37) модуля непрерывности $\omega_q(f;\delta,\rho)$ и равенства (47) получаем

$$\omega^2(z^r p_n^{(r)};t,\rho)_2\le 2\alpha_{n,r}^2(1-\cos nt)_* M_2^2(p_n,\rho). \qquad (48)$$

Умножим обе части неравенства (48) на функцию $\dfrac{\pi}{2u}\sin\dfrac{\pi}{u}t$ и проинтегрируем по t от 0 до u, затем обе части полученного неравенства возведём в степень 1/2, умножим на $\rho\gamma(\rho)$ и снова проинтегрируем по ρ от 0 до 1. Тогда, используя определение нормы в пространстве $B_{2,\gamma}$, имеем

$$\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)\left\{\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega^2(z^r p_n^{(r)};t,\rho)_2\sin\frac{\pi}{u}tdt\right\}^{1/2}d\rho$$

$$\le\alpha_{n,r}\|p_n\|_{B_{2,\gamma}}\left\{\frac{\pi}{u}\int\limits_0^u(1-\cos nt)_*\sin\frac{\pi}{u}tdt\right\}^{1/2}. \qquad (49)$$

Если теперь предполагать, что $p_n\in S_{n+1}$, то из (49) в силу (46) следует, что

$$\int\limits_0^1\rho\gamma(\rho)\left\{\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u\omega^2(z^r p_n^{(r)};t,\rho)_2\sin\frac{\pi}{u}tdt\right\}^{1/2}d\rho$$

$$\le\left\{\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u(1-\cos nt)_*\sin\frac{\pi}{u}tdt\right\}^{1/2}. \qquad (50)$$

Полагая в правой части (50) $\pi/n = u/\mu$ с учетом условия (38), получаем

$$
\begin{aligned}
&\Phi^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u (1-\cos nt)_*\sin\frac{\pi}{u}tdt \\
&\qquad = \frac{n}{2\mu}\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^u (1-\cos nt)_*\sin\frac{nt}{\mu}dt \\
&\qquad = \frac{1}{2\mu}\Phi^2\left(\frac{u}{\mu}\right)\int\limits_0^{\pi\mu} (1-\cos t)_*\sin\frac{t}{\mu}dt \le \Phi^2(u). \qquad (51)
\end{aligned}
$$

Из (50) в силу (51) имеем

$$\int\limits_0^1 \rho\gamma(\rho)\left\{\frac{\pi}{2u}\int\limits_0^u (1-\cos nt)_*\sin\frac{\pi}{u}tdt\right\}d\rho \le \Phi(u).$$

Этим включение $S_{n+1} \subset B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi)$ установлено. Но тогда из определения бернштейновского n-поперечника следует, что

$$b_n(B_{2,\gamma}^{(r)}(\Phi), B_{2,\gamma}) \ge \frac{1}{\sqrt{2}\,\alpha_{n,r}}\Phi\left(\frac{\pi}{n}\right). \qquad (52)$$

Равенство (39) вытекает из сопоставления неравенств (45) и (52). Теорема 3 доказана.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания, способствующие улучшению изложения результатов статьи.

Список литературы

1. *Бабенко К. И.* О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1958. Т. 22. № 5. С. 631–640.

2. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // *УМН.* 1960. Т. 15. № 3. С. 81–120.

3. *Тайков Л. В.* О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // *Матем. заметки.* 1967. Т 1. № 2. С. 155–162.

4. *Тайков Л. В.* Некоторые точные неравенства в теории приближения функций // *Analysis Mathematica.* 1976. Т. 2. С. 77–85.

5. *Тайков Л. В.* Поперечники некоторых классов аналитических функций // *Матем. заметки.* 1977. Т. 22. № 2. С. 285–295.

6. *Двейрин М. З., Чебаненко И. В.* О полиномиальной аппроксимации в банаховых пространствах аналитических функций // *Теория отображений и приближение функций. Наукова думка. Киев.* 1983. С. 63–73.

7. *Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory* / Berlin; Heidelberg. New York. Tokyo: Springer-Verlag. 1985.

8. *Айнуллоев Н., Тайков Л. В.* Наилучшее приближение в смысле А.Н. Колмогорова классов аналитических в единичном круге функций // *Матем. заметки.* 1986. Т. 40. № 3. С. 341–351.

9. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций. I // *Укр. матем. журнал.* 1990. Т. 42. № 7. С. 873–881.

10. *Фарков Ю. А.* Поперечники классов Харди и Бергмана в шаре из $\mathbb{C}^n$ // *УМН.* 1990. Т. 45. № 5. С. 197–198.

11. *Fisher S. D., Stessin M. I.* The n-width of the unit ball of H^q // *Journal of Approx. Theory.* 1991. V. 67. no 3. PP. 347–356.

12. *Вакарчук С. Б.* Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // *Матем. заметки.* 1995. Т. 57. № 1. С. 30–39. https://www.mathnet.ru/rus/mzm1919.

13. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Харди H_2 // *Матем. заметки.* 2000. Т. 68. № 5. С. 796–800. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1002.

14. *Вакарчук С. Б.* О некоторых экстремальных задачах теории приближений в комплексной плоскости // *Укр. матем. журнал.* 2004. Т. 56. № 9. С. 1155–1171.

15. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // *Матем. сборник.* 2010. Т. 201. № 8. С. 3–22. DOI: https://doi.org/10.4213/sm7505

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)
Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 176-199
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 176-199

16. *Шабозов М. Ш.* О наилучшем совместном приближении функции в пространстве Харди // *Труды ИММ УрО РАН.* 2023. Т. 29. № 4. С. 283–291. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-4-283-291.

17. *Шабозов М. Ш., Кадамшоев Н. У.* Точные неравенства между наилучшими среднеквадратическими приближениями аналитических в круге функций и некоторыми характеристиками гладкости в пространстве Бергмана // *Матем. заметки.* 2021. Т. 110. № 2. С. 266–281. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13054.

18. *Шабозов М. Ш.* О наилучшем совместном приближении функций в пространстве Бергмана B_2 // Матем. заметки. 2023. Т. 114. № 3. С. 435–446. DOI: https://doi.org/10.4213/mzm13422.

19. *Шабозов М. Ш., Шабозова А. А.* О точных значениях поперечников классов аналитических в круге функций // *Матем. тр.* 2024. Т. 27. № 4. С. 115–140. DOI: https://doi.org/10.25205/1560-750X-2024-27-4-115-140.

20. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* *Конструктивная теория функций комплексного переменного* / М.-Л. Наука. 1964.

21. *Тихомиров В. М.* *Некоторые вопросы теории приближений* / М.: Изд-во МГУ. 1976.

22. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // *Матем. заметки.* 1967. Т. 2. № 5. С. 513–522.

References

1. *Babenko K. I.* On the best approximations of one class analytic functions // *Izv.AN SSSR.* 1958. V. 22. Issue 5. P. 631–640. (In Russian).

2. *Tikhomirov V. M.* Widths of Sets in Function Spaces and the Theory of Best Approximations // UMN. 1960. V. 15. № 3. P. 81–120. (In Russian).

3. *Taikov L. V.* On the best approximation in the mean of certain classes of analytic functions // *Math. Notes.* 1967. V. 1. Issue 2. P. 104–109. https://doi.org/10.1007/BF01268058.

4. *Taikov L. V.* Some Sharp Inequalities in the Theory of Function Approximation // *Analysis Mathematica.* 1976. V. 2. P. 77–85.

5. *Taikov L. V.* Diameters of certain classes of analytic functions // *Math. Notes.* 1977. V. 22. Issue 2. P. 650–656. https://doi.org/10.1007/BF01780976.

6. *Dveyrin M. Z., Chebanenko I. V.* On Polynomial Approximation in Banach Spaces of Analytic Functions // *Teoriya otobrazheniy i priblizhenie funktsiy. Naukova Dumka. Kiev.* 1983. P. 63–73.

7. *Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory* / Berlin; Heidelberg. New York. Tokyo: Springer-Verlag. 1985.

8. *Ainulloev N., Taikov L. V.* Best approximation in the sense of Kolmogorov of classes of functions analytic in the unit disc // *Math. Notes.* 1986. V. 40. Issue 3. P. 699–705. https://doi.org/10.1007/BF01142473.

9. *Vakarchuk S. B.* On the widths of some classes of analytic functions in the unit circle. I // *Ukr. math. journ.* 1990. V. 42. № 7. P. 873–881.

10. *Farkov U. A.* Widths of Hardy and Bergman Classes in the Ball of $\mathbb{C}^n$ // *UMN.* 1990. V. 45. № 5. P. 197–198. (In Russian)

11. *Fisher S. D., Stessin M. I.* The n-width of the unit ball of H^q // *Journal of Approx. Theory.* 1991. V. 67. no 3. PP. 347–356.

12. *Vakarchuk S. B.* Best linear methods of approximation and widths of classes of analytic functions in a disk // *Math. Notes.* 1995. V. 57. Issue 1. P. 21–27. https://doi.org/10.1007/BF02309390.

13. *Shabozov M. Sh., Shabozov O. Sh.* Widths of Some Classes of Analytic Functions in the Hardy Space H_2 // *Math. Notes.* 2000. V. 68. Issue 5. P. 675–679. https://doi.org/10.1023/A:1026692112651.

14. *Vakarchuk S. B.* On Some Extremal Problems in the Theory of Approximation in the Complex Plane // *Ukr. math. journal.* 2004. V. 56. № 9. P. 1155–1171.

15. *Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh.* The widths of classes of analytic functions in a disc // *Sb. Math.* 2010. V. 201. № 8. P. 1091–1110. DOI: https://doi.org/10.1070/SM2010v201n08ABEH004104

16. *Shabozov M. Sh.* On the best simultaneous approximation of functions in the Hardy space // *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN.* 2023. V. 29. № 4. P. 283–291. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2023-29-4-283-291

17. *Shabozov M. Sh., Qadamshoev N. U.* Sharp Inequalities between the Best Root-Mean-Square Approximations of Analytic Functions in the Disk and Some Smoothness Characteristics in the Bergman Space // *Math. Notes*. 2021. V. 110. № 2. P. 248–260. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434621070269.

18. *Shabozov M. Sh.* On the Best Simultaneous Approximation in the Bergman Space B_2 // *Math. Notes*. 2023. V. 114. № 3. P. 435–446. DOI: https://doi.org/10.1134/S0001434623090080.

19. *Shabozov M. Sh., Shabozova A. A.* On exact values of widths of classes of functions analytic in a disk // *Mat. Tr.* 2024. V. 27. № 4. P. 115–140. DOI: https://doi.org/10.25205/1560-750X-2024-27-4-115-140.

20. *Smirnov V. I, Lebedev N. A. Constructive function theory complex variable* / M.: Nauka. 1964. 440 p. (In Russian).

21. *Tikhomirov V. M. Some problems in Approximation Theory* / M.: Izd-vo MGU. 1976. (In Russian).

22. *Chernikh N. I.* The best approximation of periodic functions by trigonometric polynomials in L_2 // *Math. Notes*. 1967. V. 2. № 5. P. 513–522. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01093942.

Информация об авторах

Мирганд Шабозович Шабозов, доктор физико-математических наук, профессор, Академик НАН Таджикистана

SPIN 9315-7401AuthorID: 743643

Scopus Author ID 55977604300

Муким Саидусайнович Саидусайнов, кандидат физико-математических наук, доцент

SPIN 9420-9343AuthorID: 812775

Scopus Author ID 57201878940

Хуромон Мамадамонович Хуромонов, кандидат физико-математических наук, доцент

SPIN 7773-9281AuthorID: 1181519

Scopus Author ID 57216297286

Author Information

Mirgand Sh. Shabozov, Doctor of Mathematics, Professor, Academician of the Academy of Sciences of Tajikistan

SPIN 9315-7401AuthorID: 743643

Scopus Author ID 55977604300

ISSN 1560-750X (Print) ISSN 3033-8271 (Online)

Математические труды, 2026, Том 29, № 2, С. 176-199

Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 2, P. 176-199

Mukim S. Saidusainov, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 9420-9343AuthorID: 812775
Scopus Author ID 57201878940
Khuromon M. Khuromonov, Candidate of Mathematics, Associate Professor
SPIN 7773-9281AuthorID: 1181519
Scopus Author ID 57216297286

Статья поступила в редакцию 20.05.2025;
одобрена после рецензирования 16.03.2026; принята к публикации 06.05.2026

The article was submitted 20.05.2025;
approved after reviewing 16.03.2026; accepted for publication 06.05.2026